曲线的基本概念

定义 1 (曲线)**.** 设映射 $\boldsymbol{r}: I=(a,b)\to\mathbb{R}^3, t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 是同胚映射，则称 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 (局部) **曲线**. 参数 t 称为**局部坐标**.

注. 简单起见，以下考虑的曲线都是 C^∞ 的.

定义 2 (正则曲线)**.** 若曲线 $C:\boldsymbol{r}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ 上一点 t 满足 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$，则称 t 是曲线 C 的**正则点**. 若 $\boldsymbol{r}'(t_0)=\boldsymbol{0}$，则称 t_0 是曲线 C 的**奇点**. 若曲线 C 上没有奇点，即每一点都是正则点，则称 C 为**正则曲线**.

注. 若无特殊说明，以下默认曲线是正则的.

定义 3 (参数变换)**.** 设映射 $\psi:(a,b)\to(\tilde{a},\tilde{b}), t\mapsto\tilde{t}$ 是双射，称为一个**可容许的参数变换**.

性质 1. 正则性与参数变换无关.

证明. 设 φ 是 ψ 的逆映射，则对曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi(\tilde{t})).$$

于是关于 t 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tilde{t}}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

而

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t}=1,$$

于是 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tilde{t}\neq0$. □

若 $\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t}>0$，则参数变换不改变曲线的方向. 否则，参数变换改变曲线的方向.

定义 4 (切向量)**.** 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，称 $\boldsymbol{r}'(t)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}$ 在 t 处的**切向量**.

于是，t_0 处的切线方程可以写作

$$\boldsymbol{r}(u)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)u.$$

这是 $\boldsymbol{r}$ 在 t_0 处的线性近似.

定义 5 (弧长)**.** 曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 (a,b) 上的**弧长**为

$$\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

注. 由积分换元公式可知，弧长与参数选取无关.

固定初始参数 t_0，则曲线 $\boldsymbol{r}$ 在 (t_0,t) 上的弧长为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

命题 1. 映射 $t\mapsto s(t)$ 是可容许的参数变换.

证明.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^{t}|r'(u)|\,\mathrm{d}u=|r'(t)|>0,$$

于是 s 是关于 t 的增函数. 由反函数存在定理，存在反函数 $t=t(s)$，于是 $t\mapsto s(t)$ 是双射. □

定义 6 (弧长参数)**.** 固定曲线 $\boldsymbol{r}$ 上一点 t_0，曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 可以用 (t_0,t) 上的弧长 $s(t)$ 表示，称 s 为曲线 $\boldsymbol{r}$ 的**弧长参数**.

命题 2. s 是曲线 $\boldsymbol{r}$ 的弧长参数当且仅当 $|\boldsymbol{r}'(s)|=1$.

证明. 若 s 是弧长参数，则

$$|\boldsymbol{r}'(s)|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=1.$$

若 $|\boldsymbol{r}'(s)|=1$，则曲线 $\boldsymbol{r}$ 从 $s=0$ 到 $s=s$ 的弧长公式

$$\int_0^s|\boldsymbol{r}'(u)|\,\mathrm{d}u=s.$$

于是 s 是弧长参数. □

注. 弧长参数给出了 $\mathbb{R}$ 中开区间到曲线的合同变换，可以想象把无弹性的绳子拉直.

例 1. 把圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 表示为弧长参数的表达式.

解. 求切向量，有 $\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$，于是 $|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$. 弧长参数

$$s(t)=\int_0^t|\boldsymbol{r}'(u)|\,\mathrm{d}u=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{a^2+b^2}t,$$

于是 $t=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s$. 故

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(a\cos\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s,a\sin\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s,b\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right).$$